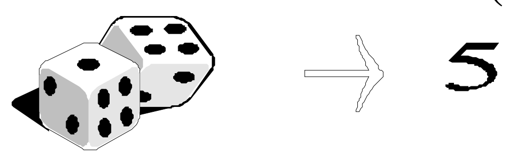
# 1. Variável aleatória

Condensação e simplificação da informação: É mais fácil lidar com uma variável que sintetize os aspetos mais significativos dos resultados da experiência aleatória do que lidar com a estrutura probabilística original.

- **Definição 3.1 – Variável aleatória**
  Uma variável aleatória, $X$, é uma função com domínio $\Omega$ e com contradomínio em $\Re$. Assim, $X : \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \Re$.

- **Exemplo 3.1 –** Quando se lançam dois dados e se regista apenas a soma de pontos obtida está-se a trabalhar com uma variável aleatória definida pela correspondência

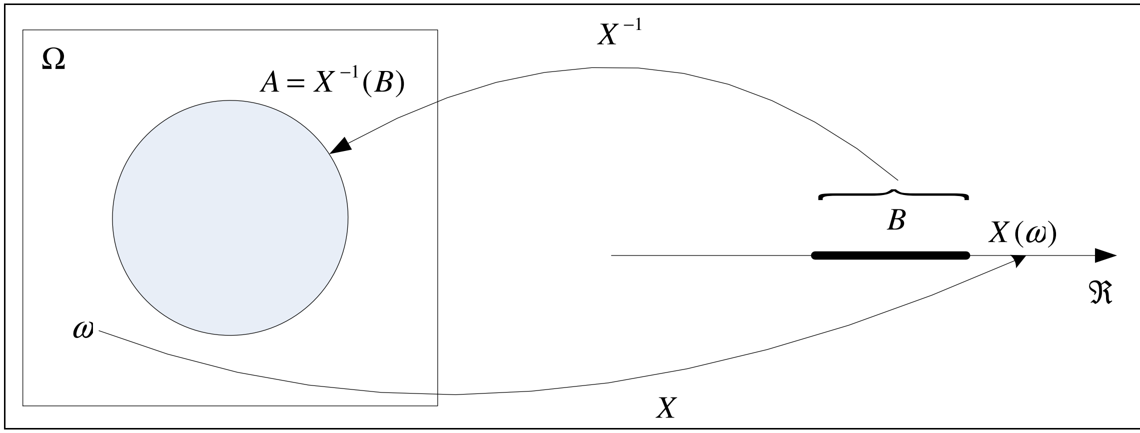
$\omega$ $\qquad\qquad$ $X(\omega)$




Em termos formais: $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$ e $X[(i, j)] = i + j$.

**Comentários:**

- A função $X$ faz corresponder a cada $\omega \in \Omega$ um e só um $X(\omega) \in \Re$;
- Definida a variável aleatória, considera-se $\Re$ como o novo espaço de resultados e os subconjuntos $B \subset \Re$ como acontecimentos.
- A prob. de $X \in B$, $P_X(B) = P_X(X(\omega) \in B)$ é dada pela imagem inversa de $B$




$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$
$$= P(A)$$

$$A = \{\omega : X(\omega) \in B\}$$

- Por "abuso de linguagem" também se chama variável aleatória à imagem $X(\omega)$;
- Não havendo confusão,
  - utiliza-se $X$ em vez de $X(\omega)$ para a imagem de $\omega$;
  - abandona-se o índice $X$, escrevendo-se $P(B)$ em vez de $P_X(B)$.

- **Convenção importante**: A **variável aleatória** é designada por **letra maiúscula** enquanto os **particulares valores** que resultam de cada experiência são representados pela respetiva **letra minúscula**.

- **Exemplo 3.2 –** Retome-se o exemplo 3.1 (soma dos pontos em 2 dados). No quadro indicam-se as imagens, as imagens inversas e as probabilidades relevantes.

$$P_X(\{2\}) = P(X = 2) = 1/36,\ P_X(\{3\}) = P(X = 3) = 2/36 = 1/18,\ \ldots$$

| Imagens | Imagens inversas | Prob |
|---|---|---|
| $\{2\}$ | $\{(1,1)\}$ | 1/36 |
| $\{3\}$ | $\{(1,2),(2,1)\}$ | 2/36 |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\{7\}$ | $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ | 6/36 |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\{12\}$ | $\{(6,6)\}$ | 1/36 |

Calcule-se a probabilidade de $B = (3,4]$.

**Exemplo:** Lança-se ao acaso uma moeda ao ar duas vezes. Seja X=número de vezes que aparece “Face”. Determine P(X=0), P(X=1) e P(X=2).

## 2. Função de distribuição

**Ideia:** Substituir a medida de probabilidade $P$ por uma função real de variável real, de tratamento matemático mais acessível

- **Definição 3.2 – Função de distribuição**

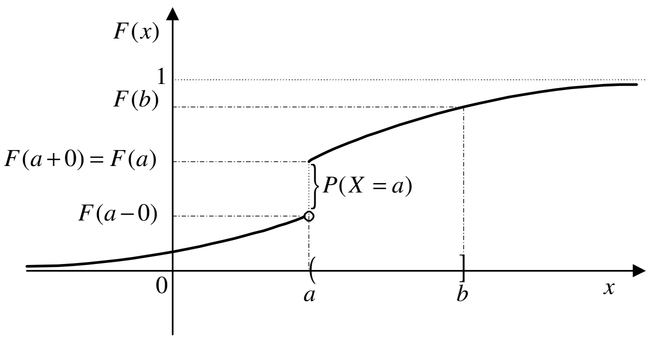
A função real de variável real, $F$, com domínio $\Re$, definida por, $F_X(x) = P(X \leq x)$, designa-se por função de distribuição da variável aleatória $X$.

- **Comentários**
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$ existe sempre por definição
  - $F_X(x)$ não é mais do que a probabilidade do acontecimento $B = \left(-\infty, x\right]$.
  - Quando tal não provoque confusão escreve-se $F(x)$ em vez de $F_X(x)$.

**Propriedades da função de distribuição** $(a, b, x, \Delta x \in \Re)$**:**

1) $0 \le F(x) \le 1$.
2) $F$ é não decrescente: $\Delta x > 0 \Rightarrow F(x) \le F(x + \Delta x)$.
3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$, quaisquer que sejam $a$ e $b$ a verificar $b > a$
5) $F$ é contínua à direita, $F(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x) = F(a)$.
6) $P(X = a) = F(a) - F(a-0)$

Demonstrar as propriedades 1e 2.



Mais propriedades (fácil demonstração a partir das anteriores):

| | |
|---|---|
| a) $P(X < b) = F(b-0)$; | d) $P(a < X < b) = F(b-0) - F(a)$; |
| b) $P(X > a) = 1 - F(a)$; | e) $P(a \le X < b) = F(b-0) - F(a-0)$; |
| c) $P(X \ge a) = 1 - F(a-0)$; | f) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0)$. |

- **Teorema 3.1 –** A função real de variável real, $F$, é uma **função de distribuição** se e só se verifica as **propriedades 2, 3 e 5**
- **Exemplo 3.4 –** Será que $F(x) = 1 - e^{-x}$ $(x > 0)$ define uma função de distribuição?

Como verificar?

- Prop. 2 – O 1º ramo é não decrescente e o segundo $(1 - e^{-x})$ é estritamente crescente
- Prop. 3 – $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$
- Prop. 5 – O único ponto que pode levantar dúvidas é $x = 0$; No entanto como $1 - e^{-x}$ é função contínua, tem-se $F(0+0) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 - e^{-x}\right) = 0 = F(0)$.

# 3. Classificação das variáveis aleatórias

Conjunto dos pontos de descontinuidade de $F(x)$:

$$D = \{ x_i : P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 0) > 0, i = 1,2,...\}$$

- Em cada ponto de descontinuidade $x_i$, o salto é igual a $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 0)$.
- O conjunto $D$ é finito ou, quando muito, infinito numerável

**Definição 3.3 – Classificação das variáveis aleatórias**

- $X$ é uma **variável aleatória discreta** se $P(X \in D) = \sum_{x_i \in D} P(X = x_i) = 1$
- $X$ é uma **variável aleatória contínua** se $D = \emptyset$ e se existe uma função real de variável real $f(x)$, não negativa, tal que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad \forall x \in \Re$.
- $X$ é um **variável aleatória mista** se a respectiva função de distribuição pode ser escrita como $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$, $(0 < \lambda < 1)$ onde:
  - $F_1 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória discreta;
  - $F_2 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória contínua.

Existem variáveis aleatórias que não são nem discretas, nem contínuas nem mistas.

## 3.1 – Variável aleatória discreta

- **Definição 3.4 – Função probabilidade**:

$$f(x) = P(X \in D) = \begin{cases} P(X = x) > 0 & \text{se } x \in D, \\ 0 & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

- A probabilidade de qualquer acontecimento $B$ pode ser obtida exclusivamente a partir da função probabilidade.

$$P(X \in B) = P(B) = \sum_{x_i \in B \cap D} f(x_i).$$

- A função de distribuição pode exprimir-se em termos da respectiva função probabilidade,

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

representando-se por $x_i$ os elementos do conjunto $D$

- A função de distribuição apresenta tantos saltos quantos os elementos do conjunto $D$.

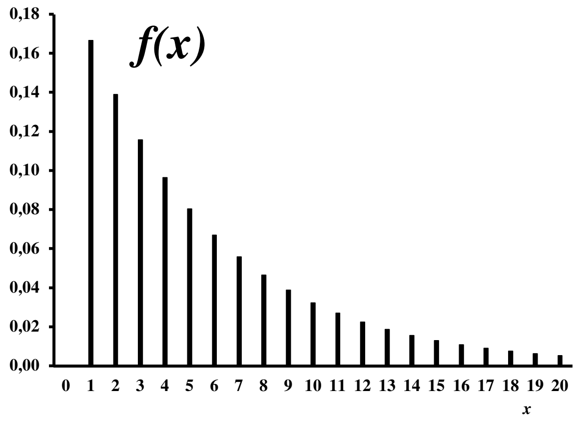
- **Exemplo 3.6 –** $X$**:** número de lançamentos de um dado até sair uma «sena» (6 pontos)

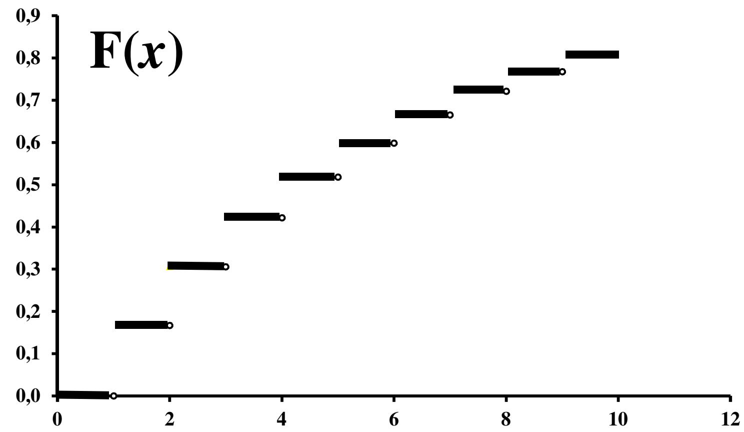
$$P(X=1)=1/6,\ \ P(X=2)=(5/6)\times(1/6),\ \ P(X=3)=(5/6)^2\times(1/6),\ldots.$$

f. de probabilidade $\rightarrow f(x)=P(X=x)=(5/6)^{x-1}(1/6)\,,\quad x=1,2,\ldots;$

f. de distribuição $\rightarrow F(x)=P(X\le x)=\sum_{k=1}^{r(x)}P(X=k)=1-(5/6)^{r(x)},\ x>0$

sendo $r(x)$ a parte inteira de *x*.




Existe uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade: 1,2,3,...

## 3.2 – Variável aleatória contínua

- **Definição 3.5 – Função densidade de probabilidade**
  A função *f*, não negativa, referida na definição 3.3

**Noção de função densidade:** Sabe-se que $P(X \in \Re) = 1$ e que $P(X \in (-\infty, x]) = F(x), \forall x \in \Re$

Para $\Delta x > 0$, $P(X \in (x, x + \Delta x]) = F(x + \Delta x) - F(x)$

A quantidade média de probabilidade no intervalo $(x, x + \Delta x]$ vem

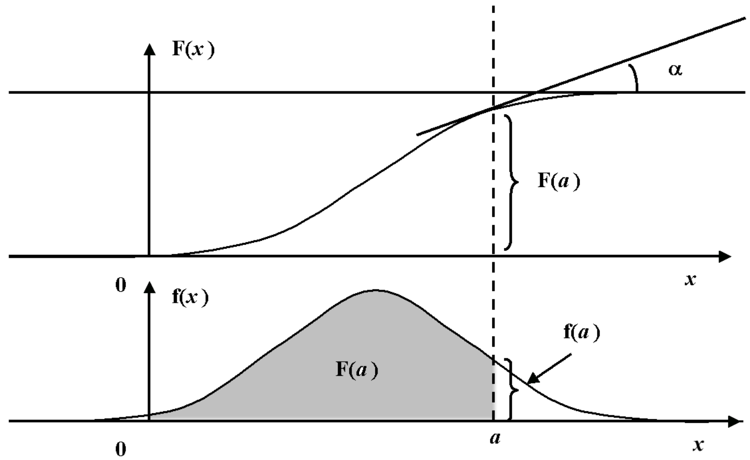
$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

O limite, quando $\Delta x \to 0$, se existir, representa a densidade de probabilidade no ponto $x$. Recorde-se que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$

Nos pontos em que $F'(x)$ não existe, convenciona-se que $f(x) = 0$. Assim,

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{(nos pontos onde existe derivada),} \\ 0 & \text{(nos outros pontos).} \end{cases}$$

Representação gráfica




Para cada ponto $a$, verifica-se facilmente que:

- $F(a)$ é a ordenada da função distribuição = área delimitada pela função densidade entre $-\infty$ e $a$;
- $f(a)$ é a ordenada da função densidade = declive da função de distribuição no ponto $a$.

**É indiferente representar uma variável aleatória contínua com a respectiva função distribuição ou com a função densidade.**

Algumas propriedades da função densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1;$
- $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b), \quad b > a.$

- Sendo $X$ variável aleatória contínua, $P(X = a) = 0$, $\forall a \in \Re$ (**a probabilidade em qualquer ponto é nula**) já que $P(X = a) = F(a) - F(a-0) = F(a) - F(a) = 0;$
- Assim

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b), \quad b > a.$$

- A função de densidade pode assumir valores superiores a 1 (**a função densidade não é uma probabilidade!**)

**Exemplo –** Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

**Exemplo 3.8 –** Assume-se que $X$, vida útil, em milhares de horas, de um componente de determinado tipo de radar tem uma função de distribuição da forma $F(x) = 1 - \exp\{-\theta\, x\}$, onde $\theta$ é um parâmetro que caracteriza a qualidade do componente (quanto menor é $\theta$, melhor é a qualidade). Assuma-se que $\theta = 0.03$.

Pretende determinar-se a probabilidade de um componente escolhido ao acaso:

a) dure menos de 20 mil horas;

b) dure entre 30 mil e 50 mil horas;

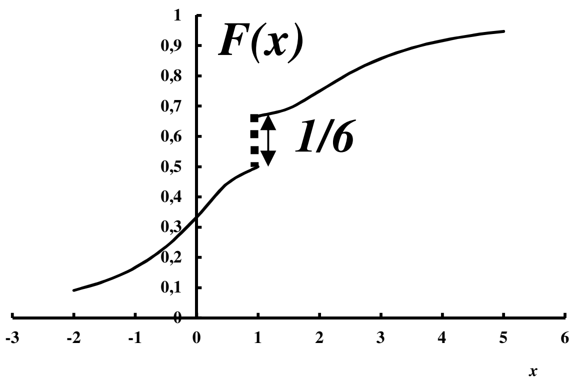
c) dure mais de 60 mil horas.

Resolver com base na função distribuição e com base na função densidade

**3.3 – Variáveis aleatórias mistas:** Combinam as 2 situações anteriores

**Exemplo 3.9 –** Considere-se a variável aleatória mista $X$ com função de distribuição,

$$F(x)=\begin{cases}\left[2+(x-1)^2\right]^{-1} & (x<1)\\ 1-\left[3+(x-1)^2\right]^{-1} & (x\geq 1)\end{cases}$$




O único ponto de descontinuidade é $x=1$.

Logo:

$$P(X=1)=F(1)-F(1-0)=1/6$$

$$P(X=x)=0,\quad x\neq 1$$

Por outro lado,

$$P(0.5<X<1)=F(1-0)-F(0.5)=1/18$$

$$P(-1<X\leq 1)=F(1)-F(-1)=1/2$$

# 4. Funções de uma variável aleatória

- Definiu-se a v.a. $X$, conhecendo-se $F_X(x)$;
- Está-se interessado numa outra v.a., $Y$, função de $X$, $Y = \psi(X)$, pretendendo-se determinar a função de distribuição de $Y$, $F_Y(y)$, a partir de $F_X(x)$.
- $\psi$ é uma função real de variável real;
- $Y$ é uma variável aleatória que assume o valor $y = \psi(x)$ quando $X = x$.

Começa-se por considerar um caso particular mais simples: $X$ é uma **variável aleatória discreta**.

- $Y=\psi(X)$ também é discreta e o problema consiste em determinar a função probabilidade de $Y$, $f_Y(y)$, a partir da função probabilidade de $X$, $f_X(x)$.
- Seja então $D=\{x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots\}$ o conjunto de pontos que $X$ assume com probabilidade positiva; consequentemente $D^*=\psi(D)$ é o conjunto de pontos que $Y$ assume com probabilidade positiva.
- Dado $y\in D^*$ seja,

$$A_y=\{x:\psi(x)=y,\, x\in D\}.$$

- A função probabilidade de $Y$ vem dada por,

$$F_Y(y)=P(Y=y)=P(X\in A_y)=\sum_{x_i\in A_y} f_X(x_i)$$

**Exemplo 3.11 –** Considere-se a variável aleatória discreta *X* com a função probabilidade dada por:

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_X(x)$ | $1/5$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/10$ | $17/60$ |

Seja $y = \psi(x) = x^2$.

Tem-se $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $D^* = \{0, 1, 4\}$. A função probabilidade de *Y* vem

| $y$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f_Y(y)$ | $1/6$ | $7/20$ | $29/60$ |

**Caso geral**: $X$ é uma **variável aleatória qualquer**

A mudança de variável assenta na igualdade, $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(A_y)$ onde $A_y = \{x : \psi(x) \le y\}$ e $P(A_y)$ pode em regra calcular-se a partir de $F_X(x)$.

**Exemplo 3.12 –** Supondo que a variável aleatória $X$ é contínua e tem função de distribuição $F_X(x)$, vão determinar-se as funções de distribuição de:

a) $Y = |X|$; b) $Y = aX + b \ \ (a \ne 0)$;

Obtém-se:

a) $F_Y(y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_X(y) - F_X(-y)$.

$$\text{b) } F_Y(y) = \begin{cases} P\left(X \le \dfrac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{se } a > 0, \\ \text{ou} & \\ P\left(X \ge \dfrac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

## Exemplo (cont)

Considere-se que $f_X(x)=1/2$ para $-1<x<1$, isto é, $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \dfrac{x+1}{2} & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

Caso a) Para $0<y<1$ vem $F_Y(y)=F_X(y)-F_X(-y)=\dfrac{y+1}{2}-\dfrac{-y+1}{2}=y$

Caso b) supondo $a=2$ e $b=1$

Para $-1<y<3$ vem

$$F_Y(y)=F_X\left(\frac{y-1}{2}\right)=\frac{\frac{y-1}{2}+1}{2}=\frac{y+1}{4}$$

## Observação Final

Mesmo sendo $X$ v.a. continua e $\psi$ é função contínua, $Y$ pode não ser contínua.

| $X$ | $Y=\psi(X)$ |
|---|---|
| Discreta | Discreta |
| Mista | Discreta<br>Mista |
| Contínua | Discreta<br>Mista<br>Contínua |

**Exemplo 3.13 –** Dada a variável aleatória $X$ com função densidade,

$$f_x(x)=\begin{cases}1/2 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{outros } x)\end{cases} \quad \text{introduza-se, } Y=\psi(X)=\begin{cases}0 & (X<0)\\ X & (X\geq 0)\end{cases}.$$

Obter a função de distribuição de $Y$.

# 5. Valor esperado

- **Exemplo 3.14 –** Considere-se uma lotaria com 100 bilhetes e os seguintes prémios: um prémio de 100 euros; dois prémios de 20 euros; 3 prémios de 10 euros. Fazendo a soma dos produtos das quantias que se podem ganhar pelas respectivas probabilidades,

$$100\times\frac{1}{100}+20\times\frac{2}{100}+10\times\frac{3}{100}+=1.7$$

obtém-se o valor esperado do comprador de um bilhete.

## • Definição 4.1 – Valor esperado de uma variável aleatória

Seja $X$ uma v.a. discreta com função probabilidade $f_X(x)$. A expressão,

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f_X(x),$$

quando, $\sum_{x \in D} |x| f_X(x) < +\infty$, define o **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de $X$.

**Notação**: $E(X) = \mu_X = \mu$

**Comentários:**

- Porquê a condição $\sum_{x \in D} |x| f_X(x) < +\infty$ ?
- O valor esperado de uma variável aleatória discreta corresponde, muitas vezes, a um ponto que **não pertence** a *D*.

**Interpretação** (ponto de vista frequencista):

Se a experiência aleatória, em cada realização da qual se observa $x$, for repetida um grande número de vezes, a média aritmética dos valores obtidos está, quase certamente, "muito próxima" de $E(X)$.

**Exemplo 3.15 –** Se $X$ é a variável aleatória que representa o número de pontos obtido com o lançamento de um dado regular, então é simples exercício verificar que $E(X) = 3.5$.

Repare-se que $E(X) \notin D$;

**Exemplo adicional –** No caso do exemplo 3.6 (nº de lançamentos até sair "6"), o cálculo do valor esperado torna-se um pouco mais complicado. Recorde-se que se tinha $f(x) = (5/6)^{x-1}(1/6),\ x = 1, 2, 3, \cdots$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{5}{6}\right)^{x} = \frac{1}{6}\times\frac{6}{5}\times\frac{5/6}{(1-5/6)^2}$$

$$= \frac{1}{5}\times\frac{5/6}{1/36} = 6$$

Recorde-se que a soma de uma série aritmético-geométrica é dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, r^k = \frac{r}{(1-r)^2} \text{ para } |r| < 1$$

**Exemplo:** Seja X uma variável aleatória com função probabilidade é dada por

$$\boldsymbol{f_X(x) = \frac{6}{(\pi x)^2}, x = 1, 2, 3, \ldots}$$

Mostre que $f_X(x)$ é de facto uma função probabilidade, mas E(X) não existe.

Note que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{-2}$

- **Definição 3.7 – Valor esperado de uma variável aleatória contínua**

Seja $X$ uma v.a. contínua com função densidade $f_X(x)$. A expressão,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx,$$

quando $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)dx < \infty$, define o valor esperado, média ou esperança matemática de $X$.

O paralelismo com o caso discreto é evidente substituindo-se somas por integrais.

- **Exemplo 5.1 –** Obter o valor esperado da variável aleatória $X$, com função densidade $f_X(x) = 3x^{-4}$, $(x > 1)$.

- **Exemplo:** Mostre que a seguinte função é uma função densidade de probabilidade mas que o respetivo E(X) não existe.

$$f_X(x) = x^{-2}, (x > 1).$$

• **Definição 3.8 – Valor esperado de uma função de variável aleatória**

$$E[\psi(X)] = \sum_{x \in D} \psi(x) f_X(x), \qquad \text{caso discreto}$$

$$E[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x) dx, \qquad \text{caso contínuo}$$

impondo-se uma condição semelhante à que vigora nas definições 3.6 ou 3.7.

**Note-se** que, sendo $X$ uma variável aleatória contínua, $\psi(X)$ **pode não ser contínua,** como se viu no capítulo anterior**.**

## Observações

- A **existência de** $E(X)$ **não implica a existência de** $E[\psi(X)]$**, e inversamente**.

- É indiferente calcular $E[\psi(X)]$ pela definição 4.2 (ou 5.2) ou proceder à mudança de variável $Y=\psi(X)$ e calcular $E(Y)$ recorrendo à definição 4.1 (ou 5.1), isto é

$$\sum_{y\in D_Y} y\, f_Y(y)=\sum_{x\in D_X} \psi(x) f_X(x) \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x) f_X(x)dx$$

- **Exemplo 3.18 –** Dada a variável aleatória discreta $X$, com função probabilidade,

$$f(x)=1/3,\ x=-1,0,1$$

considere-se a função $\psi(X)=X^2$. Calcular $E(X^2)$ pelos 2 métodos.

- **Exemplo 3.19 –** Seja uma variável aleatória $X$ com (retoma-se o exemplo 3.16)

$$f_X(x) = 3x^{-4}, \quad (x > 1), \qquad\qquad F_X(x) = 1 - x^{-3}; \qquad (x > 1)$$

Considere-se $Y = \psi(X) = X^2$. Obter $E(Y)$ (directamente e por mudança de variável)

Obter agora $E(Z)$ com $Z = \begin{cases} 0 & 1 < X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$

- Considere a variável aleatória X com função densidade $f_X(x) = 1/2^x, x = 1,2,3,\ldots$. Seja $\psi(X) = 2^X$. Mostre que E(X) existe, mas E($\psi(X)$) não existe. Note que para c<1, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{x}c^x = \frac{c}{(1-c)^2}$.

**Propriedades do valor esperado** (seja $X$ discreta, contínua ou outra)**:**

1) Se $c$ é uma constante então, $E(c) = c$.

2) Se $c$ é uma constante e se existe $E[\psi(X)]$ então, $E[c\,\psi(X)] = c\,E[\psi(X)]$.

3) Se existirem $E[\psi_1(X)]$ e $E[\psi_2(X)]$ então,

$$E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)].$$

Demonstrações no livro. Demonstrar para o caso contínuo.

Observações

- Existindo $E(\psi_j(X))$, tem-se $E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j(X)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j E\left[\psi_j(X)\right]$
- Pode existir o V.E da soma sem que exista V.E de cada $\psi_j(X)$

## Dois resultados importantes (a serem vistos adiante):

- Se $X$ e $Y$ são duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) então,

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

- Se $X$ e $Y$ são duas variáveis aleatórias **independentes** então,

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

# 6. Momentos

- Objectivo: Caracterizar uma v.a. através de um pequeno número de indicadores capazes de descrever os aspectos mais significativos do seu comportamento.

- Para tal utilizam-se 2 tipos de momentos:

    - Os momentos em relação à origem

    - Os momentos em relação à média

- Depois de definir cada um destes tipos de momentos discute-se a caracterização do comportamento da variável aleatória.

• **Definição 3.9 – Momento de ordem *k* em relação à origem**

$$\mu_k' = E(X^k) \qquad \text{(se existir)}$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx$

• **Definição 3.10 – Momento de ordem *k* em relação à média**

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \qquad \text{(se existir)}$$

Observações:

- Paralelismo com as definições anteriores com $\psi(X) = (X-\mu)^k$.

- Caso discreto $E(X-\mu)^k = \sum_{x\in D}(x-\mu)^k f_X(x)$ e caso contínuo $E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k f_X(x)dx$

- Os momentos em relação à média podem ser expressos em termos dos momentos em relação à origem. Por exemplo

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

- Resultado importante

O **teorema 3.2** garante que, se existir o momento de ordem *k* de uma variável aleatória, então também existe o momento de ordem *s*, com $s < k$, da mesma variável aleatória. Por exemplo, existindo o momento de ordem 10 existirão todos os momentos de ordem inferior a 10. O teorema é válido para os momentos ordinário e para os momentos em relação à média.

# Localização

- **1º momento em relação à origem** (média ou valor esperado de *X*) serve como **parâmetro de localização** da distribuição de *X*.
- Avaliada a localização torna-se interessante avaliar a dispersão da variável aleatória em torno desta localização (volatilidade nas séries financeiras). Será a média "representativa" do comportamento da variável?

# Dispersão em relação à média

- A dispersão e os momentos em relação à média: Parte-se da família de funções $\psi(X) = (X - \mu)^k$, onde $k = 1, 2, \ldots$
- O 1º momento em relação à média é sempre nulo → **não tem interesse**.
- O **2º momento em relação à média,** a **variância** (representada por $\mathrm{Var}(X)$, $\sigma_X^2$ ou simplesmente $\sigma^2$), é muito importante na análise da dispersão.

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E\left(\left(X - \mu\right)^2\right)$$

## Definição 3.11 - Variância

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E\left((X-\mu)^2\right)$$

**Comentários**:

- Estamos a assumir que a variância existe
- A variância nunca pode ser negativa, $\text{Var}(X) \geq 0$;
- $\text{Var}(X) = 0$, só se $X$ for variável aleatória degenerada: $P(X = c) = 1$;
- **Para o cálculo da variância pode aproveitar-se a relação**

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$

- A existência da variância implica a existência da média (teorema 3.2)

## Propriedades da variância:

1) Se $c$ é uma constante, $\text{Var}(c) = 0$;

2) Se $c$ é uma constante, $\text{Var}(c\,X) = c^2\,\text{Var}(X)$;

3) Se $c$ e $d$ são constantes, $\text{Var}(c\,X + d) = c^2\,\text{Var}(X)$.

4) Se $X$ e $Y$ são duas variáveis aleatórias discretas **independentes** então,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

## Variância, desvio-padrão e dispersão

- A variância corresponde ao valor esperado de uma grandeza ao quadrado logo não compara "bem" com a média desta grandeza. Assim utiliza-se geralmente a raiz quadrada positiva da variância, o **desvio padrão**.

- **Definição 3.12 – Desvio-padrão** $\sigma_X = +\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$,

- **Definição 3.13 – Coeficiente de variação**

  Para avaliar o peso relativo da dispersão face à localização, utiliza-se o **coeficiente de variação**: $\mathrm{CV} = \dfrac{\sigma}{\mu}$ (utiliza-se sobretudo se o suporte de $X \subset \Re^{+}$)

- Depois de avaliar a **localização** e a **dispersão** de uma v.a., existem ainda 2 aspectos interessantes: a **assimetria e a kurtosis (a assimetria é mais interessante do que a kurtosis).** Para tal recorre-se aos 3º e 4º momentos em relação à média.

- **Definição 3.14 – Coeficiente de assimetria:** $\gamma_1 = \dfrac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$,

**Interpretação** do coeficiente de assimetria:

- Parte-se do menor momento central de ordem impar que é possível utilizar;
    - Porquê um momento central de ordem impar?
    - Simetria da distribuição de $X$ em relação à média, $f(x-\mu) = f(x+\mu)$, implica que **todos** os momentos centrais de ordem impar – que existirem – sejam nulos;
- Distribuição simétrica $\rightarrow \gamma_1 = 0$
- Assimetria positiva e assimetria negativa.

• **Definição 3.15 – Coeficiente de *kurtosis*:** $\gamma_2 = \dfrac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$.

**Interpretação** do coeficiente de *kurtosis*:

- “espessura” das “caudas” da distribuição ou, de forma equivalente, o “achatamento” da função densidade na zona central da distribuição.
- A definição é válida para v.a. discretas e contínuas mas o seu interesse reside sobretudo para v.a. contínuas com distribuição simétrica.
- Os coeficientes $\gamma_1$ e $\gamma_2$ desempenham um papel muito importante para analisar o **grau de afastamento de uma certa distribuição em relação à distribuição normal**. Nesta distribuição tem-se $\gamma_1 = 0$, pois trata-se de uma distribuição

simétrica, e $\gamma_2 = 3$. Muitas vezes utiliza-se o Excesso de Kurtosis dado por $\gamma_2 - 3$ para tornar a comparação com a normal mais directa.

**Exemplo 3.21 –** (Mesma localização e dispersão diferente) Considerem-se as variáveis aleatórias discretas com funções probabilidade,

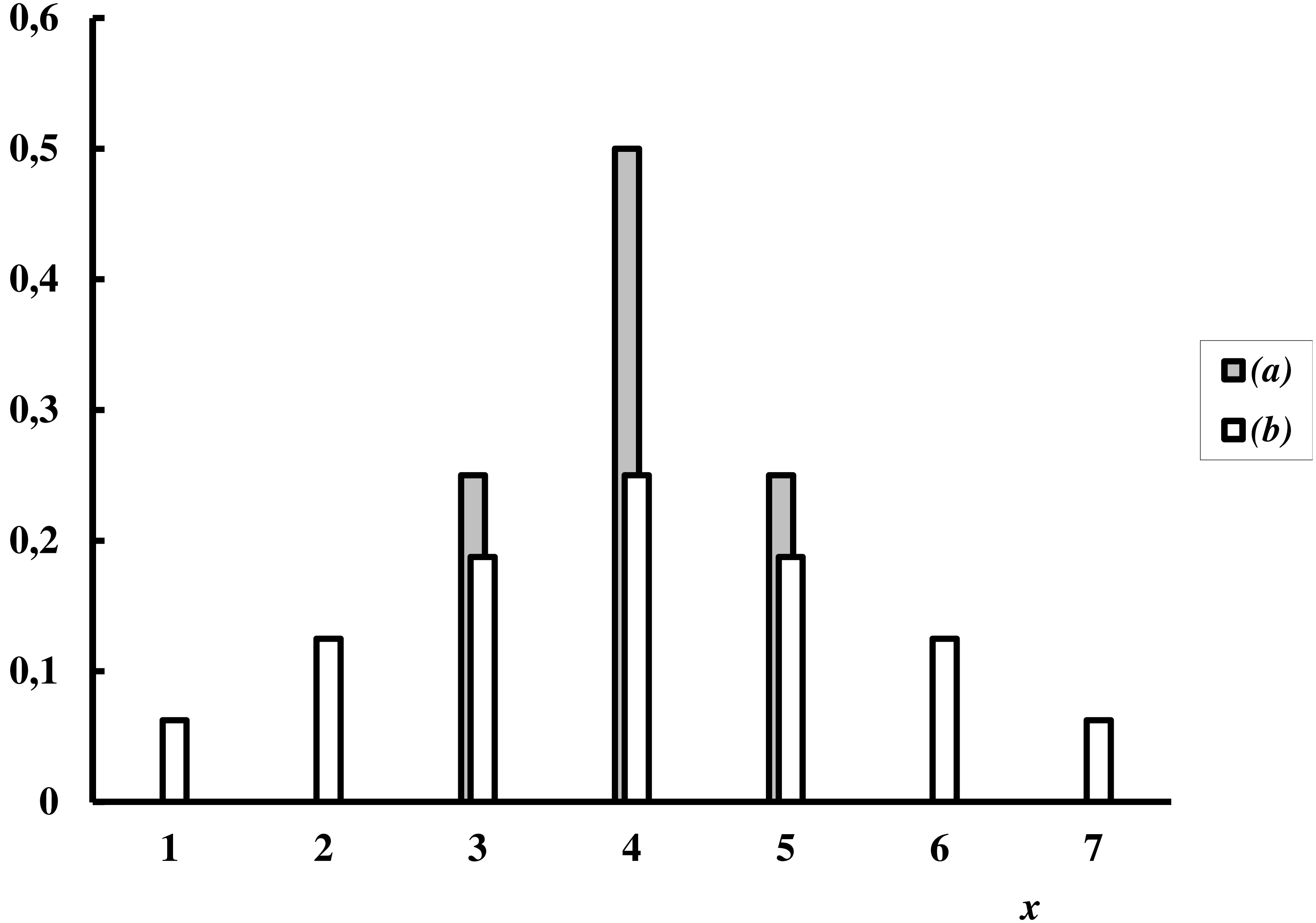
(a) $f(x) = \dfrac{2 - |x-4|}{4} \quad x = 3, 4, 5,$

(b) $f(x) = \dfrac{4 - |x-4|}{16} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

Tem-se:

(a) $\mu = 4,\ \sigma^2 = 0.5,\ \sigma = 0.71,\ \text{CV} = 0.1775,\ \gamma_1 = 0;$

(b) $\mu = 4,\ \sigma^2 = 2.5,\ \sigma = 1.58,\ \text{CV} = 0.3950,\ \gamma_1 = 0.$


0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
(a)
(b)

## 7. Parâmetros de ordem. Variáveis Aleatórias Contínuas

- Embora os parâmetros de ordem também se possam definir para v.a. discretas o seu interesse reside sobretudo na aplicação para v.a. contínuas;
- Os parâmetros de ordem ajudam a caracterizar o comportamento da variável aleatória. Eles tornam-se "imprescindíveis" quando esta não tem momentos.
- Os parâmetros de ordem são funções de quantis particulares;
- Na modelação de séries financeiras o VaR ("Value at Risk") constitui um indicador importante. O VaR mais não é do que um quantil da distribuição dos retornos.

- **Definição 3.16 – Quantil**

  O quantil de ordem $\alpha$ $(0<\alpha<1)$, $\xi_\alpha$, é um valor de *X* que satisfaz a condição,

$$\int_{-\infty}^{\xi_\alpha} f(x)dx=\alpha \Leftrightarrow F(\xi_\alpha)=\alpha.$$

- **Exemplo** (inspirado do exemplo 5.4) - Seja *X* uma v.a. que traduz o montante de uma indemnização paga por uma seguradora para determinado risco. Sabe-se que

$$f(x\,|\,\theta,\alpha)=\frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x>\theta>0, \quad \alpha>0.$$

Calculem-se os quantis 0.5 e 0.95.

Note-se que $F(x\,|\,\theta,\alpha)=1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha$ para $x>\theta>0, \quad \alpha>0.$

# Localização

- **Mediana**: Quantil de ordem $\alpha = 0.5$ - **medida de localização**

$$\xi_{0.5}: \quad \int_{-\infty}^{\xi_{0.5}} f(x)dx = 0.5 .$$

Pode também representar-se a mediana com os símbolos $\mu_e$ ou med($X$).

Tal como para qualquer quantil não está garantida a unicidade da mediana. Por exemplo se $f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1/2 & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$ é fácil verificar que qualquer valor entre 1 e 2 é mediana da distribuição.

- **Moda** (não é em rigor parâmetro de ordem) - **medida de localização**

  Para v.a. contínuas, a moda corresponde ao ponto do domínio que maximiza a função densidade (ver definição 5.8 do livro), o qual pode não ser único (ou pode não existir). Pode ser aplicado a v.a. discretas.

- No caso de distribuições simétricas unimodais, a média, a mediana e a moda são iguais.

- **Exemplo**: Para o exemplo anterior compare-se média, mediana e moda.

## Outras características

- **Quartis** $(\alpha = 0.25, 0.50, 0.75)$:
  - O primeiro quartil, $\xi_{0.25}$, delimita superiormente o primeiro quarto da massa de probabilidade;
  - O terceiro quartil, $\xi_{0.75}$, delimita inferiormente o último quarto da massa de probabilidade.
  - Obviamente que a mediana é o segundo quartil.
- **Intervalo inter-quartis**: O intervalo $(\xi_{0.25}, \xi_{0.75})$ abrange 50% da massa de probabilidade. **A amplitude inter-quartis constitui uma medida de dispersão absoluta,** no âmbito dos parâmetros de ordem,

$$\text{AIQ} = \xi_{0.75} - \xi_{0.25}.$$

Caso se pretenda uma medida de **dispersão relativa** utilizar $\dfrac{\xi_{0.75} - \xi_{0.25}}{\mu_e}$.

• **Decis** ($\alpha = 0.1,\ 0.2, \ldots, 0.9$) e **percentis** ($\alpha = 0.01, 0.02, \ldots, 0.99$);

**Exemplo –** Retome-se o exemplo anterior e calculem-se os quartis e as medidas de dispersão absoluta e relativa. Concretizem os valores (ao longo de todo o exemplo) obtidos quando $\alpha = 5$ e $\theta = 1$.